Eigenschaften von Potenzfunktionen

Unterrichtsfach	**Lehrplan HAK:** • Mathematik und angewandte Mathematik - 2. HAK (2. Jahrgang), 3. Semester – Kompetenzmodul 3 - 1. AUL (1. Jahrgang) **Lehrplan HLW:** • Mathematik und angewandte Mathematik - 3. Semester – Kompetenzmodul 3 **Lehrplan HTL:** • Mathematik und angewandte Mathematik - 3. Semester – Kompetenzmodul 3
Schulstufe	• 10. Schulstufe (2. Jg./Klasse)
Thema	• Quadratische Funktionen • Potenz- und Polynomfunktionen
Fachliche Vorkenntnisse	• Funktionsbegriff, Zahlenmengen, Definitionsmenge, Wertemenge, Potenzen, Wurzeln
Sprachliche Kompetenzen	• Fachbegriffe von der Alltagssprache abgrenzen können • Selbstständig mathematische Zusammenhänge formulieren können • Mathematische Sachverhalte unter Verwendung der Fachsprache in eigenen Worten darstellen können • Grafen interpretieren und beschreiben können

Zeitbedarf	• ca. 3–4 Unterrichtseinheiten à 50 Minuten (je nach Anzahl der eingesetzten Übungen)
Material- & Medienbedarf	• Erstellte Unterlage in Kopie (Aufgabe 4 ist farbcodiert und sollte daher in Farbe ausgedruckt werden) • Schere und laminierte Kärtchen für Aufgabe 4 • Plakatpapier für Aufgabe 5
Methodisch-didaktische Hinweise	• Sozialformen: Einzelarbeit und/oder Teamarbeit (2er oder 4er Teams) • Methodische Tools: Wortgeländer, Wortliste, Lückentext, Zuordnung, Lernplakat, Expert/innenkongress; Expert/innengruppen in Aufgabe 5: Die Unterlage beinhaltet mehrere unabhängige Beispiele. Diese können einzeln eingesetzt werden.
Quellen	• Allerstorfer/Langer/Siegl: Angewandte Mathematik@HAK 2. Linz: Veritas-Verlag 2017 (2. Aufl.), S. 52.
Erstellerin	Sibylle Gratt

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Aufgabe 1: Alltagssprache – Fachsprache

Was bedeuten die folgenden Begriffe in der Alltagssprache und der Mathematik?

a. Recherchieren Sie in diversen Quellen folgende Begriffe und Phrasen und beschäftigen Sie sich mit deren Bedeutung sowohl in der Alltagssprache als auch in der (angewandten) Mathematik im Zusammenhang mit funktionalen Aspekten.

b. Schreiben Sie jeweils einen sinnvollen Satz, wie diese Begriffe in beiden Fällen verwendet werden.

c. Diskutieren Sie mit einer Partnerin/einem Partner über Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede in der Verwendung.

Alltagssprache	**Fachsprache**
monoton: Peter spricht monoton und sein Vortrag ist ziemlich fad.	**monoton:** Die Funktion ist im angegebenen Intervall monoton steigend.
global:	**global:**
lokal:	**lokal:**
Pol:	**Polstelle:**
Lücke:	**Lücke:**
Funktion:	**Funktion:**
Wert:	**Wertemenge:**
Definition:	**Definitionsmenge:**
progressiv:	**progressiv:**
degressiv:	**degressiv:**
Symmetrie:	**Symmetrie:**
Maximum:	**Maximum:**
Minimum:	**Minimum:**
Intervall:	**Intervall:**

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Aufgabe 2: Allgemeine Beschreibung von Funktionen

Vervollständigen Sie den Lückentext mit folgenden Begriffen:

Definitionsmenge – zunehmen – Nullstelle – größte – eindeutige Zuordnung – reellen Funktion – streng monoton fallend – f(x) = 0 – Teilmengen – Wertemenge – Minimum

Eine Funktion ist eine ___________________. Jedem Element x der _______________ A wird genau ein Element y einer ________________ B zugeordnet. Sind sowohl A als auch B _________________ der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so spricht man von einer ______________________.

x ist eine _______________ wenn der Funktionswert an der Stelle x gleich null ist – ____________ .

Der _____________ Funktionswert von f heißt (globales) Maximum der Funktion.

Der kleinste Funktionswert von f heißt (globales) _______________ der Funktion.

f heißt streng monoton steigend, wenn bei größer werdenden x-Werten die Funktionswerte y ____________________.

f heißt ___________________________, wenn bei größer werdenden x-Werten die Funktionswerte y abnehmen.

Quelle: Angewandte Mathematik @hak 2. Jahrgang; Veritas; Allersdorfer, Langer und Siegl, S.52.

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Aufgabe 3: Graphen interpretieren und beschreiben

In der untenstehenden Graphik ist die Funktion $f(x) = x^3 - 5x - 2$ dargestellt.

Betrachten Sie den Graf und beantworten Sie die folgenden Fragen.

a. Geben Sie die Definitionsmenge, die Wertemenge und das Monotonieverhalten (in Intervallen) an.

b. Zeichnen Sie die Nullstellen, die Extrema und die Extremstellen in den Grafen ein und geben Sie eine detaillierte Beschreibung des Grafen an.

Benutzen Sie dafür folgende Wortgeländer:

Die Definitionsmenge der Funktion .... – Als Wertemenge dürfen ... – Im Grafen finden sich .... – Der Graf besitzt .... – Im Intervall .... – ist die Funktion ... – Die Funktion ist im Intervall ...

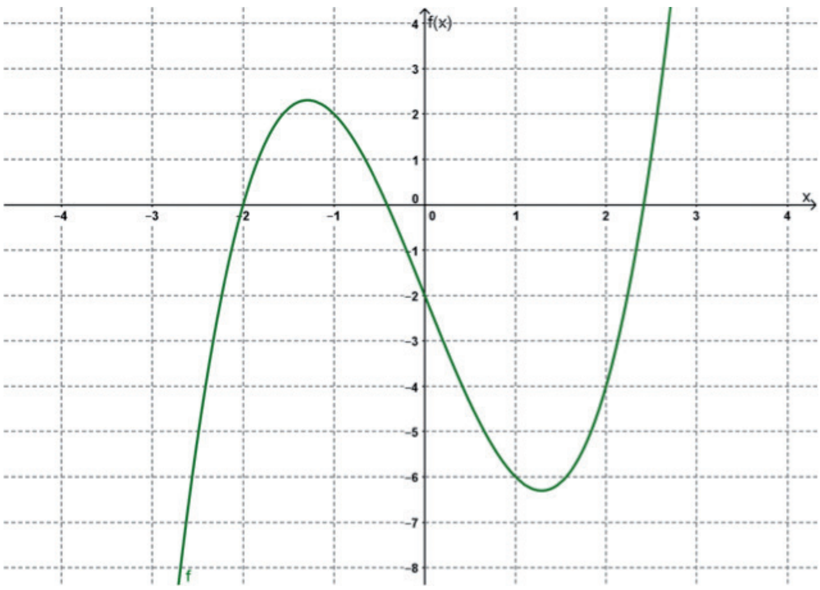


Abb. 1: Graf einer Funktion

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Aufgabe 4: Zuordnung (Set A) und Beschreibung (Set B) von Eigenschaften einzelner Funktionen

Anhang 1 und 2 zu Aufgabe 4

Start: Ordnen Sie den folgenden Grafen die jeweiligen Eigenschaften zu und finden Sie die passende Funktion. Verwenden Sie dafür die laminierten Kärtchen aus Set A (siehe Anhang 1).

Fortgeschrittene Schüler/innen: Set B (siehe Anhang 2) enthält Aufforderungen von mathematischen Operationen.

- Beantworten Sie die Fragestellungen in ganzen Sätzen. Führen Sie diese mit Hilfe der folgenden Grafen durch.
- Ordnen Sie zum Schluss die gegebenen Funktionen zu.

★ **Tipp:** Die Farben auf den Kärtchen entsprechen den Farben der Graphen.

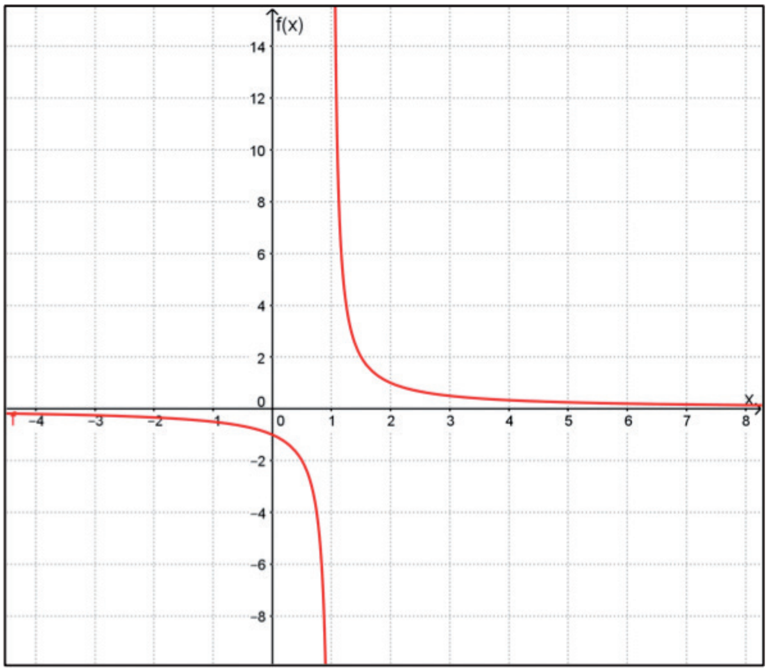


Abb. 2: Funktion (a)

Eigenschaften von Potenzfunktionen

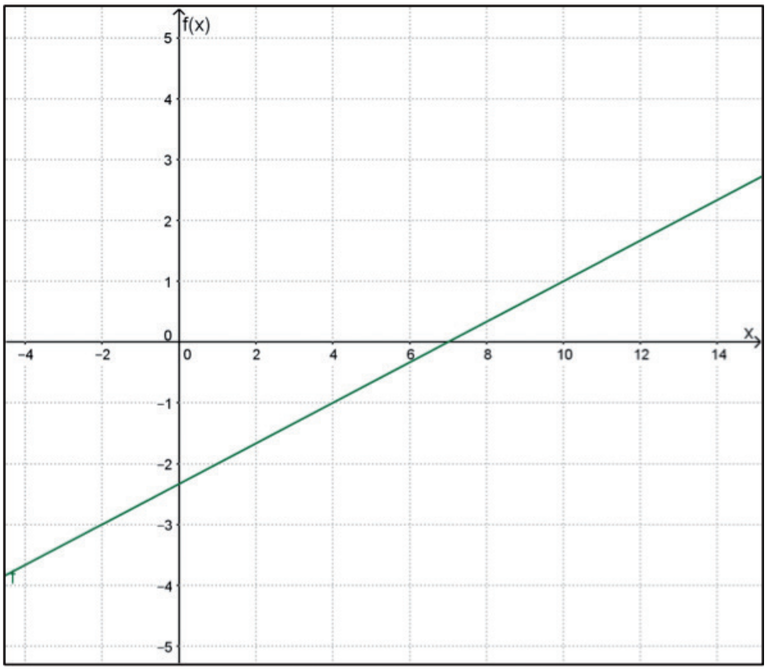


Abb. 3: Funktion (b)

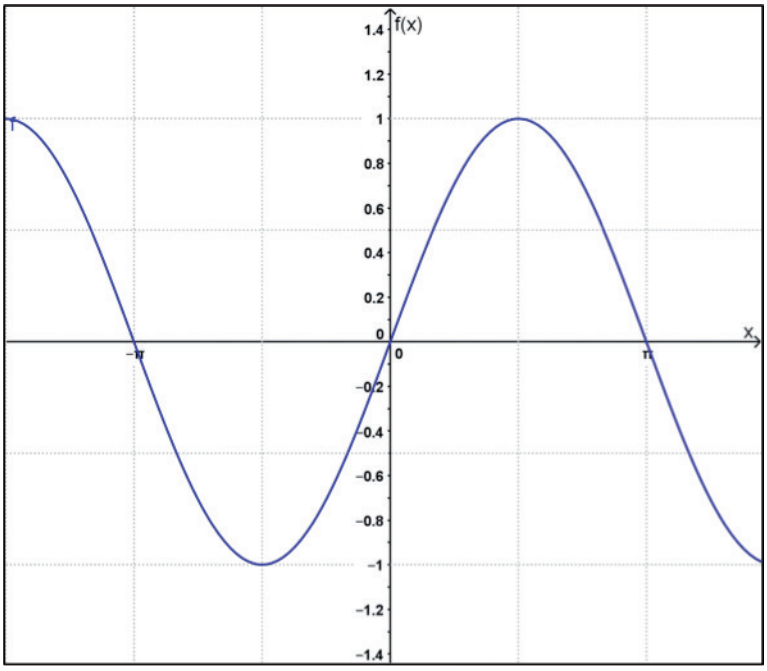


Abb. 4: Funktion (c)

Eigenschaften von Potenzfunktionen

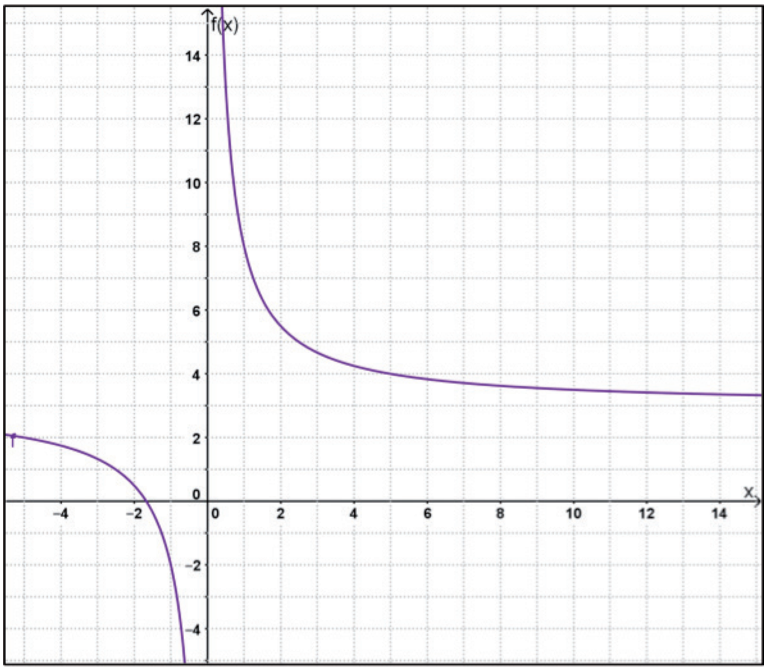


Abb. 5: Funktion (d)

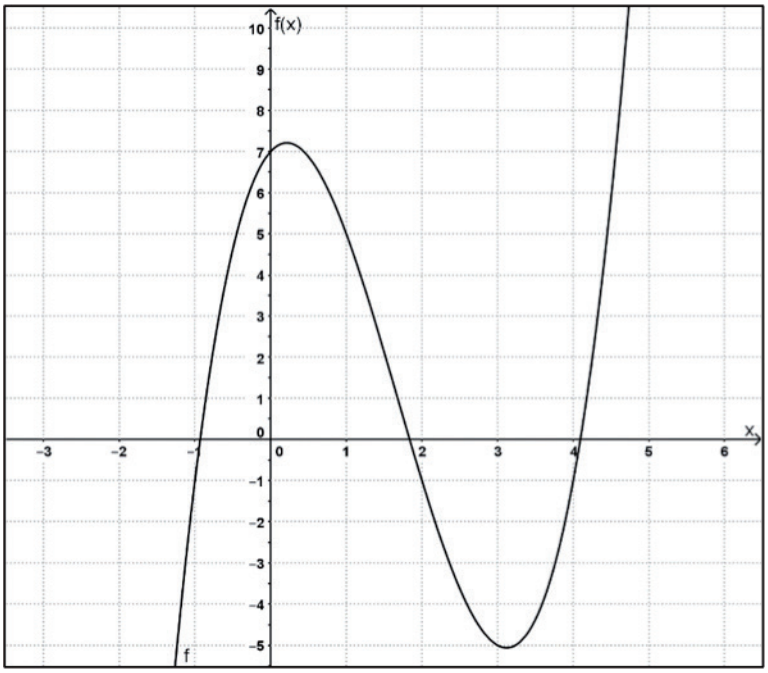


Abb. 6: Funktion (e)

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Anhang 1 zu Aufgabe 4: Set A

Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.	Die Wertemenge liegt bei $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.	Es gibt eine Polstelle bei x = 1.
Eine Asymptote liegt bei x = 1 und eine bei y = 0.	Im Intervall]-∞; 1[ist die Funktion monoton fallend.	Im Intervall]1; +∞[ist die Funktion monoton fallend.
Die Funktion ist symmetrisch zum Punkt (1 | 0).	Die größtmögliche Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$.	Die Wertemenge ist $\mathbb{R}$.
Es gibt keine Definitionslücke.	Es gibt keine Polstelle und keine Asymptote.	Die Funktion hat genau eine Nullstelle bei x = 7.
Die Funktion hat keine Extremstellen.	Die Funktion ist streng monoton steigend.	Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$.
Die Wertemenge liegt im Intervall [-1; 1].	Die Funktion hat weder Polstellen noch Asymptoten.	Die Funktion hat Nullstellen bei -π, 0 und bei π.
Die Funktion hat ein lokales Maximum im Intervall [0; π].	Die Funktion hat ein lokales Minimum im Intervall [-π; 0].	Im Intervall $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ist die Funktion streng monoton steigend.
Im Intervall $]\frac{\pi}{2};\pi[$ ist die Funktion streng monoton fallend.	Die Funktion ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.	Die Definitionsmenge der Funktion ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Die Wertemenge ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.	Es gibt eine Polstelle bei x = 0.	Eine Asymptote liegt bei x = 0 und eine bei y = 3.
Es gibt eine Nullstelle im Intervall [-2; 0].	Im Intervall]-∞, 0[ist die Funktion monoton fallend.	Im Intervall]0 ; +∞[ist die Funktion monoton fallend.
Die Funktion ist für die reellen Zahlen definiert.	Die Werte der Funktion umfassen die reellen Zahlen.	Es gibt weder Asymptoten noch Polstellen oder Definitionslücken.
Im Intervall [-1; 1] findet man ein lokales Maximum.	Die Funktion hat ein lokales Minimum im Intervall [2,5; 3,5].	Die Funktion hat drei Nullstellen.
Die Funktion ist im Intervall [-1; 0] streng monoton steigend.	Im Intervall [0,5; 2,5] fällt die Funktion streng monoton.	$f(x) = \frac{1}{x-1}$
$f(x) = \frac{x-7}{3}$	$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \frac{5}{x} + 3$
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 7$		

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Anhang 2 zu Aufgabe 4: Set B

Bestimmen Sie die Definitions- und Wertemenge.	Geben Sie die Polstelle und die Asymptoten der Funktion an.	Ermitteln Sie die Nullstellen und die Extremstellen, sofern diese vorhanden sind.
Erklären Sie das Monotonieverhalten der gegebenen Funktion.	Diskutieren Sie die gegebene Funktion hinsichtlich der Definitions- und Wertemenge.	Lesen Sie aus dem Grafen die Nullstelle(n) ab.
Beschreiben Sie das Monotonieverhalten dieser Funktion.	Bestimmen Sie die Größen k und d mithilfe des Grafen.	Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion an.
Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion.	Diskutieren Sie, ob es weitere Nullstellen gibt und in welchem Abstand voneinander diese auftreten.	Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion.
Interpretieren Sie die Funktion hinsichtlich dem Auftreten weiterer Extrempunkte.	Untersuchen Sie die Funktion auf ihr Symmetrieverhalten.	Geben Sie die Definitions- und Wertemenge der Funktion an.
Lesen Sie aus dem Grafen Asymptoten und/oder Polstellen ab.	Beschreiben Sie das Monotonieverhalten der Funktion.	Betrachten Sie den Grafen der Funktion hinsichtlich der Symmetrie.

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Geben Sie die Nullstellen der Funktion an.	Beschreiben Sie das Monotonieverhalten der Funktion.	Lesen Sie die Extremstellen der Funktion aus dem Grafen ab.
Betrachten Sie die Funktion hinsichtlich Asymptoten und Polstellen bzw. Definitionslücken.	$f(x) = \frac{1}{x-1}$	$f(x) = \frac{x-7}{3}$
$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \frac{5}{x} + 3$	$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 7$

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Aufgabe 5: Expert/innenkongress zu Potenzfunktionen

Die Klasse teilt sich in fünf Expert/innengruppen auf. Jede Gruppe zeichnet drei passende Grafen von Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^n$.

Folgende Eigenschaften von Potenzfunktionen sind zu ermitteln und in ganzen Sätzen zu formulieren:

- die größtmögliche Definitionsmenge
- das Monotonieverhalten
- die Symmetrie

Jede Gruppe erstellt ein Handout. Dieses wird den Expert/innen mit auf den Weg in die anderen Expert/innengruppen gegeben und dient als Erklärungshilfe.

Diese Handouts werden abschließend im Plenum kurz vorgestellt und auf einem Lernplakat zusammengefasst.

Gruppe 1: Potenzfunktionen mit gerader, positiver Hochzahl

Gruppe 2: Potenzfunktionen mit ungerader, positiver Hochzahl

Gruppe 3: Potenzfunktionen mit gerader, negativer Hochzahl

Gruppe 4: Potenzfunktionen mit ungerader, negativer Hochzahl

Gruppe 5: Die Wurzelfunktion mit $n_1 = 0{,}5$, $n_2 = 0{,}2$ und $n_3 = 0{,}6$

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Lösung – Aufgabe 1

Alltagssprache	Fachsprache
monoton: Peter spricht monoton und sein Vortrag ist ziemlich fad.	**monoton**: Die Funktion ist im angegebenen Intervall monoton steigend.
global: Die Firma ist global vernetzt.	**global**: Es müssen die Grenzwerte untersucht werden, um global entscheiden zu können.
lokal: Das Restaurant bietet lokale Spezialitäten an.	**lokal**: Es müssen die Grenzwerte untersucht werden, um lokal entscheiden zu können.
Pol: Der Steingarten ist ein Ruhe-Pol im hektischen Alltag.	**Polstelle**: Eine Polstelle ist eine einpunktige Definitionslücke einer Funktion.
Lücke: Zwischen den einzelnen Steinen ist eine große Lücke.	**Lücke**: Die Funktion (f) hat Definitionslücken.
Funktion: Der Fernseher hat viele Funktionen.	**Funktion**: Der Graf einer Funktion ist monoton fallend.
Wert: Der Wert des Bildes ist unbezahlbar.	**Wertemenge**: Eine Funktion hat eine Wertemenge.
Definition: Die Definition von „progressiv" kann man googeln.	**Definitionsmenge**: Jedem Element x der Definitionsmenge A wird genau ein Element y einer Wertemenge B zugeordnet.
progressiv: Die Musik ist sehr progressiv.	**progressiv**: Die Funktion krümmt sich links, d.h. die Funktion ist progressiv.
degressiv: Bei degressiver Abschreibung werden die Kosten kleiner.	**degressiv**: Eine progressive und degressive Kostenfunktion.
Symmetrie: Das Muster hat eine gute Symmetrie.	**Symmetrie**: In dieser Aufgabe geht es um die Symmetrie der Funktion f(x).
Maximum: Die Firma bezahlt das Maximum.	**Maximum**: Der größte Funktionswert von g heißt Maximum der Funktion.
Minimum: Die Firma bezahlt ein Minimum.	**Minimum**: Minimum ist gleich das minimale Element.
Intervall: Die Sirene heult in 10-Minuten Intervallen.	**Intervall**: Im Intervall $]-\infty; 1[$ ist die Funktion monoton fallend.

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Lösung – Aufgabe 2

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Jedem Element x der Definitionsmenge A wird genau ein Element y einer Wertemenge B zugeordnet. Sind sowohl A als auch B Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so spricht man von einer reellen Funktion.

x ist eine Nullstelle wenn der Funktionswert an der Stelle x gleich null ist – $f(x) = 0$.

Der größte Funktionswert von f heißt (globales) Maximum der Funktion.

Der kleinste Funktionswert von f heißt (globales) Minimum der Funktion.

f heißt streng monoton steigend, wenn bei größer werdenden x-Werten die Funktionswerte y zunehmen.

f heißt streng monoton fallend, wenn bei größer werdenden x-Werten die Funktionswerte y abnehmen.

Quelle: Angewandte Mathematik @hak 2. Jahrgang; Veritas; Allersdorfer, Langer und Siegl, S.52.

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Lösung – Aufgabe 3

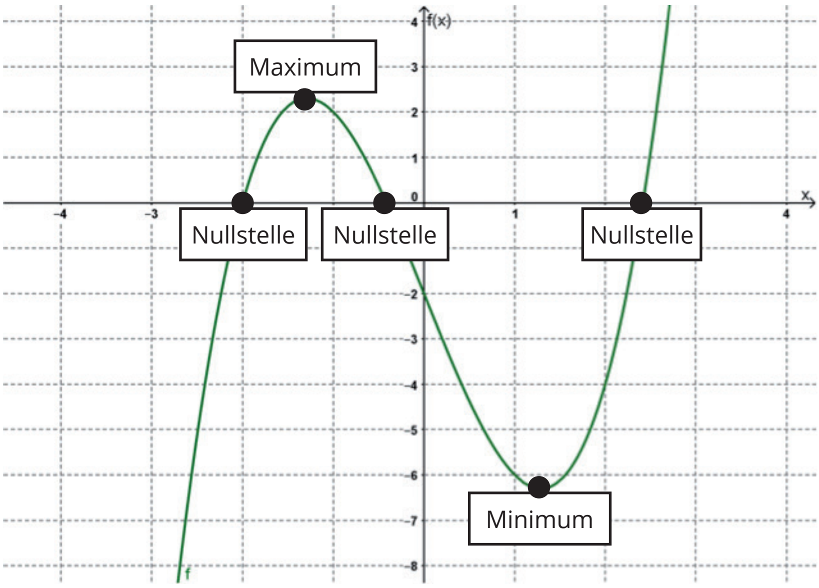


Abb. 1: Graf einer Funktion

Beispiellösung

Die Definitionsmenge der Funktion ist $\mathbb{R}$. Als Wertemenge dürfen wir $\mathbb{R}$ nehmen.

Im Grafen finden sich drei Nullstellen.

Der Graf besitzt ein Maximum und ein Minimum.

Die Funktion ist im Intervall $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$ streng monoton fallend.

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Lösung – Aufgabe 4

Die Lösung ist für beide Sets dieselbe. Hinweis: Laminieren Sie die Kärtchen der beiden Sets und mischen Sie das jeweilige Set gut durch.

Funktion (a): $f(x)= \frac{1}{x-1}$

Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Die Wertemenge liegt bei $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Es gibt eine Polstelle bei $x = 1$.

Eine Asymptote liegt bei $x = 1$ und eine bei $y = 0$.

Im Intervall $]-\infty; 1[$ ist die Funktion monoton fallend.

Im Intervall $]1; +\infty[$ ist die Funktion monoton fallend.

Die Funktion ist symmetrisch zum Punkt $(1|0)$.

Funktion (b): $f(x) = \frac{x-7}{3}$

Die größtmögliche Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$.

Die Wertemenge ist $\mathbb{R}$.

Es gibt keine Definitionslücke.

Es gibt keine Polstelle und keine Asymptote.

Die Funktion hat genau eine Nullstelle bei $x = 7$.

Die Funktion hat keine Extremstellen.

Die Funktion ist streng monoton steigend.

Funktion (c): $f(x) = sin(x)$

Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$.

Die Wertemenge liegt im Intervall $[-1; 1]$.

Die Funktion hat weder Polstellen noch Asymptoten.

Die Funktion hat Nullstellen bei $-\pi$, 0 und bei π.

Die Funktion hat ein lokales Maximum im Intervall $[0; \pi]$.

Die Funktion hat ein lokales Minimum im Intervall $[-\pi; 0]$.

Im Intervall $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ist die Funktion streng monoton steigend.

Im Intervall $]\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ist die Funktion streng monoton fallend.

Die Funktion ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Funktion (d): $f(x) = \frac{5}{x} + 3$

Die Definitionsmenge der Funktion ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Die Wertemenge ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Es gibt eine Polstelle bei $x = 0$.

Eine Asymptote liegt bei $x = 0$ und eine bei $y = 3$.

Es gibt eine Nullstelle im Intervall [-2; 0].

Im Intervall]-∞, 0[ist die Funktion monoton fallend.

Im Intervall]0 ; +∞[ist die Funktion monoton fallend.

Funktion (e): $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 7$

Die Funktion ist für die reellen Zahlen definiert.

Die Werte der Funktion umfassen die reellen Zahlen.

Es gibt weder Asymptoten noch Polstellen oder Definitionslücken.

Im Intervall [-1; 1] findet man ein lokales Maximum.

Die Funktion hat ein lokales Minimum im Intervall [2,5; 3,5].

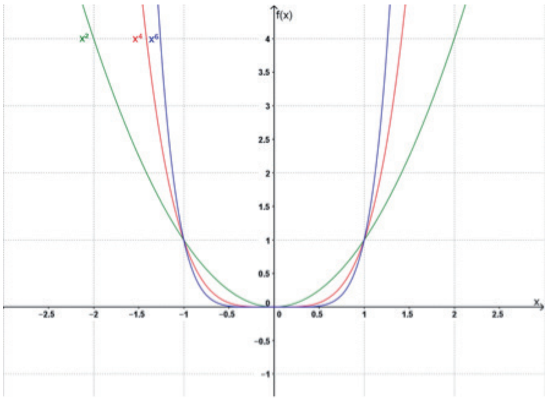
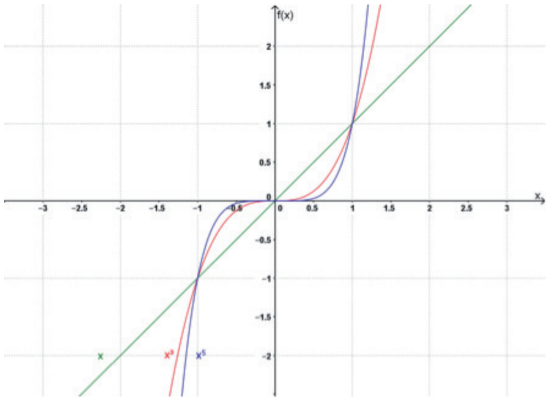
Die Funktion hat drei Nullstellen.

Die Funktion ist im Intervall [-1; 0] streng monoton steigend.

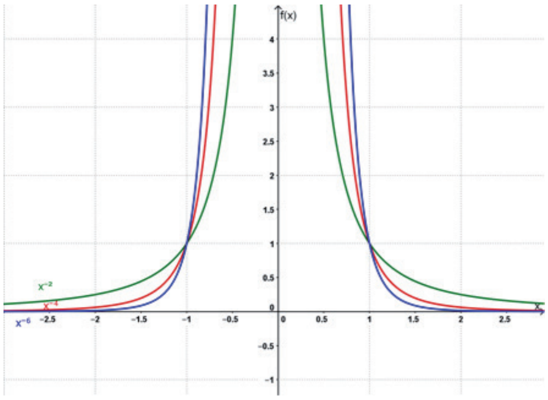
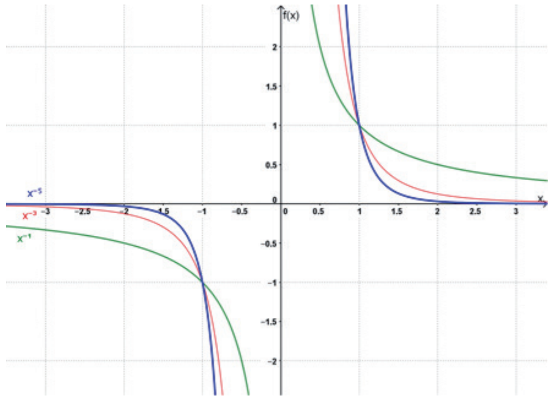
Im Intervall [0,5; 2,5] fällt die Funktion streng monoton.

Eigenschaften von Potenzfunktionen

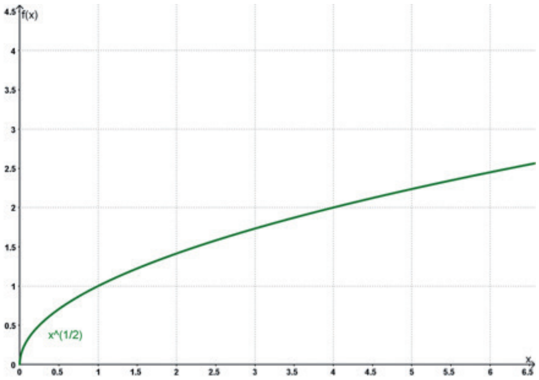
Lösung – Aufgabe 5

	gerade Hochzahl	**ungerade Hochzahl**
positive Hochzahl	$f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^6$, …  Die größtmögliche Definitionsmenge ist ℝ. Für $x \leq 0$ ist die Funktion streng monoton fallend. Für $x \geq 0$ ist die Funktion streng monoton steigend. Die Grafen sind symmetrisch zur y-Achse.	$f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$, …  Die größtmögliche Definitionsmenge ist ℝ. Die Funktion ist streng monoton steigend in ℝ. Die Grafen sind symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Eigenschaften von Potenzfunktionen

	gerade Hochzahl	ungerade Hochzahl
negative Hochzahl	$f(x) = x^{-2}$, $f(x) = x^{-4}$, $f(x) = x^{-6}$, ...  Es gibt gleichwertige Schreibweisen wie z. B.: $f(x)=x^{-2}$ und $f(x)= \frac{1}{x^2}$ usw. Die größtmögliche Definitionsmenge ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. 0 ist eine Polstelle. Die x- und die y-Achse sind Asymptoten. Für $x < 0$ ist die Funktion streng monoton steigend. Für $x > 0$ ist die Funktion streng monoton fallend. Die Grafen sind symmetrisch zur y-Achse.	$f(x) = x$, $f(x) = x^{-3}$, $f(x) = x^{-5}$, ...  Es gibt gleichwertige Schreibweisen wie z. B.: $f(x)=x^{-1}$ und $f(x)= \frac{1}{x}$ usw. Die größtmögliche Definitionsmenge ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. 0 ist eine Polstelle. Die x- und die y-Achse sind Asymptoten. Für $x < 0$ und $x > 0$ ist die Funktion streng monoton fallend. Die Grafen sind symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Eigenschaften von Potenzfunktionen

	gerade Hochzahl
Wurzelfunktion	$f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = \sqrt{x}$  Die größtmögliche Definitionsmenge ist $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Funktion ist für $x \geq 0$ streng monoton steigend.